1. Έστω $z \in \mathbb{C}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq \beta$ όπου ισχύει ότι $(1+iz)^{2012} = \dfrac{\alpha+\beta i}{\beta+\alpha i}$

i) Να δείξετε ότι $z \notin \mathbb{R}$

ii) Να δείξετε ότι $|z-i| = 1$ και στη συνέχεια ότι $|z| \leq 2$

iii) Να δείξετε ότι $|z-(3+5i)| \geq 4$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + 1$ και η συνάρτηση g για την οποία ισχύει ότι : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{g(x)-\alpha}{x-1} = \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

ii) Να λυθεί η ανίσωση : $f\left(\ln\left(x^2+x+2\right)\right) > f\left(-x^2-x-1\right)$

iii) Αν η εφαπτομένη ευθεία της f στο σημείο $A(0,1)$ εφάπτεται στην g στο σημείο της $B(1,2)$, να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

iv) Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί $z \in \mathbb{C}$ ώστε : $z^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta i - 1$

3. Δίνεται η αντιστρέψιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου ισχύει ότι : $f\left(y+f(x-y)\right) = f(x+y) - y$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :

i) $f(0) = 0$

ii) Να δείξετε ότι $f(x) = x$

iii) Να δείξετε ότι η f εφάπτεται με την $g(x) = e^{\frac{x}{e}}$

4. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ που τέμνει τον θετικό ημιάξονα Oy και ικανοποιεί την ισότητα : $f^2(x) - 2f(x) = x^2 - x$. Να βρεθεί η $f(x)$ και το όριο $\lim\limits_{x \to 0}\left[\left(f(x)-2\right)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)-2}\right]$

5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{2x+1} \cdot x^2 = 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$ και στη συνέχεια ότι οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = -\dfrac{1}{x}$ έχουν κοινή εφαπτομένη σε μη κοινό σημείο.

6. Να βρεθεί ο μιγαδικός $z \in \mathbb{C}$ αν ισχύει ότι : $|z| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = |z-2i|$

7. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=x^4+\alpha$ και $g(x)=\alpha^2\cdot x^2+(2\alpha+1)x-2\alpha^2$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε οι f, g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο $x_0=\alpha$.

8. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ όπου ισχύει ότι $f\left(\alpha x^2+\beta x+\beta\right)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Αν η συνάρτηση $f\circ g$ είναι αντιστρέψιμη να δείξετε ότι η g είναι αντιστρέψιμη.

ii) Να δείξετε ότι $\alpha=0$ και $\beta\neq 0$

iii) Αν για στην συνεχή συνάρτηση h ισχύει ότι : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\beta h(x)+\beta-1}{x-1}=1$, να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f, h έχουν κοινή εφαπτομένη στα σημεία $A(0,f(0))$, $B(1,h(1))$

9. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ όπου ισχύει : $f(x)g(x)=f(x)+g(x)+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Αν ισχύει ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$:

i) Να βρεθεί η μονοτονία της g

ii) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ αν δίνεται ότι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+1}{f(x)-2}=+\infty$

iii) Να λυθεί η εξίσωση : $f\left(e^x-1\right)\cdot g\left(\ln(x+1)\right)=f\left(\ln(x+1)\right)\cdot g\left(e^x-1\right)$ αν $f(x)>0$, $g(x)>0$

10. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι συνεχής και 1-1.

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

ii) Αν για τους μιγαδικούς $z=f(\alpha)+f(\beta)i$ και $w=1+i$ ισχύει ότι $\left|\dfrac{z}{w}+1\right|=\left|\dfrac{z}{w}-1\right|$ να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (α,β).

iii) Να λυθεί η εξίσωση : $f\left(f(x)\right)-1=f\left(f(0)\right)-e^x$

11. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)=|z_1+x\cdot z_2|, x\in\mathbb{R}$ και $z_1,z_2\in\mathbb{C}$. Αν ο μιγαδικός $z_1\overline{z}_2$ είναι φανταστικός να δείξετε ότι η συνάρτηση f' έχει ρίζα στο $(-1,1)$

12. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\Delta=(0,1)$ με $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} f(x) & x\in(0,1) \\ 1 & x=0 \text{ ή } x=1 \end{cases}$ έχει οριζόντια εφαπτομένη.

13. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=\alpha+f(\alpha)i$, $z_2=\beta+f(\beta)i$ με $\alpha<\beta$ και η συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι : $\alpha^2+2\sigma\upsilon\nu\alpha=\beta^2+2\sigma\upsilon\nu\beta$ και ο μιγαδικός z_1z_2 είναι φανταστικός, να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β)

14. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\eta\mu\sqrt{x+1}-\eta\mu\sqrt{x}\right)=0$

15. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $A=[0,1]$ ώστε

$f'(0)=f(1)-f(0)$ και η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} & \text{αν } 0<x\le 1 \\ f'(0) & x=0 \end{cases}$.

Να δείξετε ότι :

i) Η συνάρτηση g εφαρμόζει το θεώρημα Rolle στο A

ii) Υπάρχει $\xi\in(0,1):\xi f'(\xi)=f(\xi)-f(0)$

iii) Υπάρχει εφαπτομένη της συνάρτησης f που διέρχεται από το σημείο $K(0,f(0))$

16. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και 1-1 στο διάστημα $A=[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f^2(\alpha)-f^2(\beta)=2\sigma\upsilon\nu f(\beta)-2\sigma\upsilon\nu f(\alpha)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ρίζα στο A

17. Έστω $P(x)$ ένα πολυώνυμο βαθμού $\nu\ge 3$.

i) Αν το $P(x)$ είναι περιττού βαθμού να δείξετε ότι έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ii) Αν ισχύει ότι $P'(x)\ne 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι το $P(x)$ έχει μόνο μία πραγματική ρίζα

18. **Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $\Delta=(\alpha,\beta)$ με $f'(x)\neq 1$ για κάθε $x\in\Delta$. Αν $f(\beta)-\beta=f(\alpha)-\alpha$ να δείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $A=[\alpha,\beta]$**

19. **Έστω ότι ισχύει : $f(0)<2f'(x)<f(2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει μόνο μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.**

20. **Έστω ότι $f'(x)=e^{x^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και $\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)\right|\leq|x-y|$ για κάθε $x,y\in f(A)$ και να δείξετε ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο $f(A)$.**

21. **Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $A=[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)f(\beta)<0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ ώστε : $f'(x_1)f'(x_2)>0$.**

22. **Έστω η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $A=[0,1]$ με $f(\alpha)f(\beta)<0$ και $f(0)=f(1)=0$ για κάθε $\alpha,\beta\in(0,1)$.
Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1)>0$ και $f''(\xi_2)<0$**

23. **Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :**

$$f(1)=1\quad,\quad f(0)=0\qquad \text{και}\qquad f'(x)=3x^2+\int_0^x\left(f^2(t)\cdot\int_{-1}^{1}f(x)dx\right)dt$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i) Να δείξετε ότι $f(x)=x^3$

ii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=-e^x+\alpha$

24. **Αν δίνεται ότι $f'(x)>2012$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$**

25. **Αν ισχύει $f'(x)=2x+f(\alpha)e^{f(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$, $f(1)=1$.
Να δείξετε ότι $f(x)=x^2$.**

26. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A=[\alpha,\beta]$ και ισχύει ότι : $\left(f(\alpha)-2\right)e^{f(\alpha)}+f(\alpha)=\left(f(\beta)-2\right)e^{f(\beta)}+f(\beta)$
Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει μόνο μία ρίζα στο A.

27. Αν ισχύει ότι $f'(x)=-xf^3(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$ και $f(0)=1$, να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f καθώς και η μονοτονία της.

28. Αν δίνεται για κάθε $x>0$ ότι $\left(f(x)-x\right)\left(f'(x)-1\right)=\dfrac{\ln x}{x}+x$, $f(1)=2$ να βρεθεί η $f(x)$.

29. Έστω ότι ισχύει : $f''(x)+f(x)=g''(x)+g(x)$ και οι συναρτήσεις f και g Έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=(f-g)^2+(f'-g')^2$ είναι σταθερή και f=g.

30. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $A=[0,+\infty)$ και $f'(x)-f(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ για κάθε $x>0$ και $f(1)=e$. Να δείξετε ότι $f(x)=xe^x$ για κάθε $x\in A$.

31. Αν ισχύει : $f'(x)f(x)=\sqrt{1+f^2(x)}$ για κάθε $x>0$ και $f(1)=\sqrt{3}$ να βρεθεί η συνάρτηση $f(x)$.

32. Έστω η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x)=x+f\left(f(x)\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

33. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f^3(x)+f(x)=2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :

i) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

ii) Η συνάρτηση f έχει σημείο καμπής το $O(0,0)$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{e^x}=0$

iv) $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{5}{8}$

34. Έστω ότι για κάθε $x>0$ ισχύει ότι $f(x)>0$ και $xf'(x)=f(x)$

i) Να δείξετε ότι $\ln x \le x-1$ για $x>0$ και να λυθεί η εξίσωση $\ln x = x-1$

ii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\ln\frac{f(x)}{x}-\frac{f(x)}{x}$ είναι σταθερή στο διάστημα $A=(0,+\infty)$

iii) Αν $f(1)=1$ να δείξετε ότι $f(x)=x$

35. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ όπου ισχύει :

$$f(x)+e^{-f^2(x)}=x \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

i) Να δείξετε ότι $\frac{2x}{e^{x^2}}<1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $f(1)=0$.

iii) Να λυθεί η εξίσωση $\int_x^{x^2} f(t)dt=\int_{x^5}^{x^3} f(t)dt$, $x>0$

iv) Να βρεθεί η f^{-1}.

36. Έστω ότι για κάθε $x>0$ ισχύει ότι : $x^3 f''(x)=e^{\frac{1}{x}}$, $f(1)=e$ και $f'(1)=0$

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}-e^{\frac{1}{x}}$ είναι σταθερή και ότι $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$.

ii) Να δείξετε ότι $f(A)=[e,+\infty)$

iii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\frac{1}{x}+\ln x=\ln\alpha$ για $\alpha>0$.

iv) Να δείξετε ότι $f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$ για κάθε $x>0$.

37. Έστω f παραγωγίσιμη και γνησίως μονότονη στο $A=[1,2]$ με

$f(1)=2$, $f(2)=1$

Να δείξετε ότι :

i) Υπάρχει $x_0 \in (1,2)$: $2f(x_0)=3$ και στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση $2f(x)=e^{x-x_0}+2$

ii) Υπάρχει εφαπτομένη της f κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_1 : x-y+2009=0$

iii) Υπάρχουν $x_1 \neq x_2 \in A$: $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=\dfrac{-1}{4(x_0^2-3x_0+2)}$

iv) Η εξίσωση $f'(x)\cdot(2-x)=f(x)-2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$

38. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)f(x)=e^{2x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0)=1$

i) Να δείξετε ότι $f(x)=e^x$

ii) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της f στο $(0,f(0))$ εφάπτεται στην συνάρτηση $g(x)=\ln x+2$

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $E: f(x)=\varepsilon\varphi x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

iv) Να δείξετε ότι η ρίζα της (E) του ερωτήματος (iii) είναι μοναδική

39. Έστω f παραγωγίσιμη στο $A=(0,+\infty)$ με $f(1)=1$.

Αν κάθε εφαπτόμενη της στο $M(x_0,f(x_0))$ διέρχεται από το σημείο $K(2x_0,0)$

i) Να δείξετε ότι : $f(x)=\dfrac{1}{x}$

ii) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}\cdot \eta\mu f(x)\right)$

iii) Να λυθεί η εξίσωση : $e^{f(x)}=2e^x-e$

40. Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{x-e}-1$, $x\in\mathbb{R}$

i) Να βρεθεί η αντίστροφη f^{-1} της f

ii) Να δείξετε ότι η f έχει ένα κοινό σημείο $A(x_0, y_0)$ με την ευθεία $y = x$ όπου $x_0 \in (e, 2e)$

iii) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f^{-1}(x) = x_0$

iv) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της f στο $M(e, f(e))$ εφάπτεται στην $g(x) = -e^{-x} - e + 1$

41. Έστω η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0) = 1$ και $(f'(x))^2 = 1 + (f(x))^2$. Να δείξετε ότι :

i) Το $O(0,0)$ είναι σημείο καμπής της f

ii) Να δείξετε ότι $f(x) \geq x$ για $x \geq 0$

iii) Να βρεθεί το $I = \int_0^1 f^2(x)dx$

42. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να βρεθεί η μονοτονία της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$, $x > 0$

43. Έστω η f συνεχής στο $A = [0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ώστε να ισχύει : $|f'(x)| \geq 3x^2$ για κάθε $x \in (0,1)$

i) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

ii) Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η $g(x) = f(x) - \alpha x^3$ να εφαρμόζει το Θ. Rolle στο A

iii) Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύουν $z_1(f(0) - i) = f^2(0) + 1$, $i \cdot \overline{z_2} = 2 + f(1)i$, να δείξετε ότι $|z_1 - z_2| \geq \sqrt{2}$

44. Έστω f παραγωγίσιμη στο $A = [0, +\infty)$ με $f(0) > 0$ και ισχύει ότι : $f^4(x) + f^3(x) + f(x) = x + 1$ για κάθε $x \geq 0$. Να βρεθεί η μονοτονία της f.

45. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι : $f(0)<f'(x)<f(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και έχει σύνολο τιμών $f(A)=\mathbb{R}$

ii) Να δείξετε ότι η f έχει μια ρίζα α με $\alpha\in(-\infty,0)$

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(2x-\alpha)=\alpha f(x)$ έχει μοναδική ρίζα

46. Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x-h)}{3h}=-f(x) \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Αν $f'(0)=f(0)=0$ να δείξετε ότι $f(x)=0$

47. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ να λυθεί η εξίσωση : $\int_{x}^{3x-2} f(t)dt=2\int_{1}^{x} f(t)dt$

48. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{x\ln x-1}{x}$, $A=(0,+\infty)$

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και το σύνολο τιμών της είναι το $f(A)=\mathbb{R}$

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in A$ ώστε $x_0\ln x_0^2=2+2013\cdot x_0$

iii) Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της συνάρτησης f παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon_1: e^2\cdot x+(1-e)y=0$

iv) Να βρεθεί το $I=\int_{1}^{e} f(x)dx$

49. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x\left(\int_1^t e^{u^2}du\right)dt$. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης f και να δείξετε ότι $f(x)\geq f'(0)x$

50. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f'''(x)>0$ και $f(2-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να βρεθεί το σημείο καμπής της συνάρτησης f και να υπολογισθεί το

$I=\int_0^2 f(x)dx$

51. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f''(x)=e^{(x-1)^3}$ και $f(0)=0,\ f'(0)=1$ να δείξετε ότι:

i) $f(x)\geq x$ για $x\in\mathbb{R}$

ii) $\int_0^1 f(x)dx=\frac{4-e}{6}$

52. Έστω η f πολυωνυμική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ που έχει μόνο δύο τοπικά ακρότατα, ελάχιστο στο α και μέγιστο στο β. Να δείξετε ότι η f έχει σημείο καμπής

53. Έστω ότι για τις συναρτήσεις f, g ισχύει ότι :

$g(x)=e^x+x+e-\frac{1}{2}-\int_0^1 g(x)dx$ και $e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x$.

Να δείξετε ότι: $f(x)=\ln x$ και $g(x)=e^x+x$

54. Αν η συνάρτησης f είναι συνεχής και για κάθε $x>0$ ισχύει ότι

$f(x)=\ln x+1-\int_1^e f(x)dx$, να δείξετε ότι $f(x)=\ln x$

55. Έστω η συνάρτηση f'' συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Αν δίνεται ότι $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-\alpha}{x-\alpha}=1$ και $(\beta-\alpha)f'(\alpha)<f(\beta)-f(\alpha)$ με $\alpha<\beta$

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

ii) Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $g(x)=f(x)-x$

iii) Να βρεθεί το $\lim_{x\to\alpha}\frac{e^x-e^\alpha}{\int_\alpha^x (f(t)-t)dt}$

iv) Να δείξετε ότι $2\int_\alpha^\beta f(x)dx>\beta^2-\alpha^2$

56. Αν $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση f' έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y=0$. Να δείξετε ότι $\int_0^1 (2x-1)f(x)dx>0$

57. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σημείο καμπής της $f(x)=\int_2^{e^x+e^{-x}} \sqrt{t^2-4}dt$

58. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$ με $f(0)<0$ και $\int_0^1 f(x)dx>0$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1):f'(\xi)>0$

59. Έστω οι συναρτήσεις f, g συνεχείς και όχι σταθερές στο διάστημα $A=[\alpha,\beta]$ με $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in A$.

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta):\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx=f(\xi)\cdot\int_\alpha^\beta g(x)dx$

60. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ όπου ισχύει $\int_0^x x^2 f(xt)dt\geq 2x^3 f(x)$.

Να δείξετε ότι $f(0)=0$

61. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}+1$ και $g(x)=-x+\int_x^{x+1} f(t)dt$

i) Να βρεθεί η μονοτονία των f και g

ii) Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης f

iii) Να βρεθεί η πλάγια ασύμπτωτη της συνάρτησης g στο $+\infty$

62. Να βρεθεί το εμβαδόν χωρίου μεταξύ της συνάρτησης $f(x)=\int_1^x e^{t^2}dt$ και των αξόνων.

63. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{t-x+1}dt$. Να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι $f(A)=\left[\ln\frac{3}{4},+\infty\right)$

64. **Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση f με $f'(x)>0$ για $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και $f'(0)=0$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει σημείο καμπής το $A(0,f(0))$**

65. **Έστω $f^3(x)+f(x)=x^3$.**

i) **Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$**

ii) **Να δείξετε ότι η $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$**

66. **Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$ έχει σημείο καμπής το $O(0,0)$ και $f(x)\geq x$ για κάθε $x\geq 0$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι η f έχει εφαπτόμενη ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$**

67. **Έστω η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ όπου $x^3+x^2\leq f(x)\leq e^{x^2}-1+x^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

i) **Να δείξετε ότι $f'(0)=0$**

ii) **Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[1,e]$ ώστε $f(x_0)=ex_0^{\,2}$**

iii) **Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,e)$ ώστε $f''(\xi)=2e$**

iv) **Να βρεθεί η μονοτονία της $g(x)=4x\cdot\int_0^1 f(xt)dt-x^4+e^x$**

68. **Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases} x\ln x & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ και $g(x)=\int_x^1 f(t)dt$.**
Να βρεθεί η μονοτονία της συνάρτησης f και τα ακρότατα της g.

69. **Έστω ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f'(0)<f''(x)<f'(1)$.**
Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

70. **Έστω ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=e^{x^2}$ και $f(1)=0$.**

i) **Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τους άξονες $x'x$ και $y'y$**

ii) **Να δείξετε ότι $e(x-1)<f(x)<(x-1)e^{x^2}$ για $x>1$**

71. Έστω ότι για κάθε $x>0$ είναι $f(x)>0$ και $f'(x)=-2x\cdot f(x)$ με $f(1)=1$.

i) Να δείξετε ότι $f(x)=e^{1-x^2}$ και να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης f

ii) Να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της $F(x)=\int_1^x\left(1+\frac{1}{2t^2}\right)f(t)dt$ στο $A=[1,+\infty)$ είναι το $F(A)=\left[0,\frac{1}{2}\right)$

iii) Να δείξετε ότι $2e\int_1^x e^{-t^2}dt<1$ για $x>1$

72. Έστω ότι για $x\in A=[\alpha,\beta]$ ισχύει ότι $f''(x)=2f(x)f'(x)$ και $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=1$, $f'(\gamma)=2$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο A και να βρεθεί το εμβαδόν χωρίου ανάμεσα στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\gamma$ όπου $\gamma\in A$

73. Έστω ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει ότι $x^2f''(x)=e^{\frac{1}{x}}$ και $f(1)=e$, $f'(1)=0$. Να δείξετε ότι $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ και να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x=\alpha\cdot e^{-\frac{1}{x}}$

74. Έστω ότι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in A=[\alpha,\beta]$, α>0 και $f'(\alpha)=f(\alpha)=0$.
Να δείξετε ότι:

i) $f'(x)>\frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta]$

ii) Υπάρχει μοναδικό $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $\xi f(\xi)=\int_\alpha^\beta 2f(x)dx$

75. Για κάθε $t\in(0,+\infty)$ ισχύει ότι $tf''(t)=\frac{1}{t^2}e^{\frac{1}{t}}$ και $f(1)=e$, $f'(1)=0$
Να δείξετε ότι $f(A)=[e,+\infty)$ και $f(3x)+f(x)>2f(2x)$ για $x>1$

76. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^{2x}+\alpha e^x+\beta$ διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$ και εφάπτεται στον άξονα $x'x$

i) Να δείξετε ότι $\alpha=-4$ και $\beta=4$

ii) Να βρείτε το εμβαδόν χωρίου ανάμεσα στην C_f, την οριζόντια ασύμπτωτη και τον άξονα $y'y$

77. **Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ με $g(x)>0$ και**

$$h(x)=\int_0^x f(t)g(t)dt\cdot\int_0^x g(t)dt-2\int_0^x\left(g(u)\cdot\int_0^u f(t)g(t)dt\right)du$$

, να δείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A=(0,+\infty)$

78. **Έστω η συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ για την οποία υπάρχει το όριο της συνάρτησης f σε κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

i) **Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.**

ii) **Να λυθεί η εξίσωση :** $\displaystyle\int_x^{3x-4} f(t)dt=2\int_2^x f(t)dt$

iii) **Να δείξετε ότι :** $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt\ge\int_1^2 xf(t)dt$ **για** $x\in[0,1]$

iv) **Να δείξετε ότι :** $\displaystyle\int_1^x f(t)dt\ge(x-1)f(x)$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$.

v) **Να βρείτε το πλήθος των ριζών της** $E:\ f\left(\dfrac{x^3-4x}{x^2-1}\right)=f(2010)$

79. **Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει ότι** $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)-x}{x^2}=1$

i) **Να βρεθεί η εφαπτομένη (ε) της f στο $x_0=0$.**

ii) **Να δείξετε ότι η (ε) εφάπτεται στην $\phi(x)=\ln x+1$.**

iii) **Να δείξετε ότι η f δεν είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.**

iv) **Να δείξετε ότι** $\displaystyle\left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right)^2<\int_\alpha^\beta f^2(x)dx\cdot(\beta-\alpha)$, $\alpha<\beta$

80. **Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)>1$ και $f''(f(x))\cdot f'(x)=f'(f'(x))f''(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η f έχει ελάχιστο στο α και ισχύει ότι $f'(f(\alpha))=f(f'(\alpha))$, να δείξετε ότι :**

i) $f'(f(x))=f(f'(x))$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$.

ii) $\alpha=0$

iii) **Η συνάρτηση $g(x)=f'(x)-x$ είναι αντιστρέψιμη και έχει ρίζες τους** αριθμούς 0 και $f(0)$.

iv) Να δείξετε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

v) Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx < f(1) - \frac{1}{2}$

81. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι: $\int_0^{x^2} x \cdot f(t)dt \geq x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i) Να δείξετε ότι $f(0) = 0$

ii) Να βρεθεί το $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x}$

iii) Αν η $f - g$ είναι αντιστρέψιμη και $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - g(x)}{x^2} = 1$, να βρεθεί η μονοτονία της $h(x) = \int_0^x (f(t) - g(t))dt$, $x \in \mathbb{R}$.

82. Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη της f' στο $-\infty$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

ii) Να δείξετε ότι $\int_0^1 (3x^2 - 2x)f(x)dx > 0$

83. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x - 2ex$ και η g που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g''(x) > 0$ και $\lim_{x \to -\infty} g'(x) = 0$

i) α. Να βρεθεί η μονοτονία και το σύνολο τιμών της f.

β. Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς δυο θετικές ρίζες.

ii) Να βρεθεί το εμβαδόν χωρίου ανάμεσα στην f, την εφαπτομένη της που διέρχεται από το (0,0) και τον άξονα y΄y.

iii) Να δείξετε ότι $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iv) Αν α , β οι ρίζες της f να αποδείξετε ότι : $\int_{\alpha}^{\beta} e^x g(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} 2eg(x)dx$

84 .Έστω f παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ όπου ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ότι :

$$f(x)\cdot\int_0^x f(t)dt = e^{2x} - e^x$$

i) Να δείξετε ότι $f(x) = e^x$

ii) Να δείξετε ότι $f(x) \geq x + \frac{x^2}{2} + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iii) Να βρεθεί το εμβαδόν χωρίου από την f και τις εφαπτόμενες ευθείες στα $A(0,f(0))$, $B(1,f(1))$.

iv) Δυο κάθετες ευθείες ε_1 , ε_2 διέρχονται από το σημείο $\Sigma\left(\frac{e}{2},\frac{e}{2}\right)$ και η μια εφάπτεται στην f. Να βρεθεί το εμβαδόν χωρίου από την f και τις ε_1 , ε_2 .

85. Έστω f συνεχής στο $A = [0,+\infty)$ και $\int_{2\pi}^{x} t^2 f\left(\frac{1}{t}\right)dt = -\sigma\upsilon\nu x + 1$ για κάθε $x > 0$.

i) Να δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \eta\mu\frac{1}{x} & \alpha\nu \quad x > 0 \\ 0 & \alpha\nu \quad x = 0 \end{cases}$

ii) Να δείξτε ότι η f εφάπτεται στον άξονα $x'x$, αλλά έχει άπειρα κοινά σημεία με αυτόν.

iii) Να δείξετε ότι η $\varepsilon:\ y = x$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

86. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 όπου $\frac{4{z_1}^2 + {z_2}^2}{z_1 z_2} = 2$. Να δείξετε ότι $|z_2| = 2|z_1|$

87. Έστω η συνάρτηση f' συνεχής στο $\mathbb{R}$ όπου ισχύει

$$4f(4)-2f(2)=\int_2^4 f(x)dx.$$

Να δείξετε ότι:

i) $\int_2^3 xf'(x)dx=\int_4^3 xf'(x)dx$

ii) Η συνάρτηση $g(x)=\int_2^x tf'(t)dt+\frac{\ln x}{x}-\frac{\ln 2}{2}$ δεν είναι αντιστρέψιμη.

iii) Υπάρχει $\xi\in(2,4)$ ώστε $\xi^3 f'(\xi)=\ln\xi-1$

88. Έστω η συνεχής f στο $A=(0,+\infty)$ ώστε να ισχύει :

$$f(x)-x=2\frac{\ln x-1}{x}+2\int_1^e (f(x)-x)dx+2$$

i) Να δείξετε ότι $f(x)=x+2\frac{\ln x-1}{x}$ για $x>0$.

ii) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο A.

iii) Αν η g μια παράγουσα της f στο A, να δείξετε ότι:

$$g(x)+g(3x)<2g(2x)$$

iv) Να βρεθεί το εμβαδόν χωρίου ανάμεσα στην C_f, την πλάγια ασύμπτωτη και την $x=\lambda$ με $\lambda>e$.

89. Έστω f, g συνεχείς στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει : $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x^3}=1$.

Αν η συνάρτηση $f-g$ είναι $1-1$ τότε :

i) Να δείξετε ότι $f(0)=g(0)$

ii) Να βρεθεί η μονοτονία της συνάρτησης $h(x)=\int_0^x (f(t)-g(t))dt+e^x-x$

iii) Αν δίνεται ότι $\lim_{x\to+\infty}(h'(x)-e^x+g(x))=1$, να βρεθεί η ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

90. **Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο $A=[0,+\infty)$ με $f(0)=0$ ώστε για κάθε $x\geq 0$ να ισχύει ότι : $f(1)\leq f'(x)\leq f(1)+e^{-x}$.**

i) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,x)$: $f(x)=xf'(\xi)$

ii) Να δείξετε ότι η ευθεία ε: $y=f(1)x$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

iii) Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx\leq\frac{f(1)}{2}$ αν η f' είναι συνεχής στο A.

91. **Έστω f συνεχής στο $A=(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$ και $(x^2-y^2)f(xy)=\int_{y^2}^{x^2}f(t)dt$ για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$**

i) Να δείξετε ότι $f'(1)=2$ και ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο A

ii) Να βρεθεί ο τύπος της f και η αντίστροφη της

iii) Να βρεθεί ο τύπος της $g(x)=\int_1^x f(t)e^{\frac{1}{2}t^2}dt$

iv) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)$

92. **Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ όπου ισχύει ότι : $f^3(x)+f(x)=8x^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$**

i) Να δείξετε ότι $0\leq f(x)\leq 2x$ για $x\geq 0$.

ii) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(e^{3x})=f(3e^x-1)$ έχει ακριβώς δυο ρίζες.

iv) Να δείξετε ότι $\int_0^x f(t)dt\leq x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

v) Να δείξετε ότι η ε: $y=2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

93. **Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $A=\mathbb{R}-\{1\}$ και η συνάρτηση $g(x)=\int_4^x f(t)dt$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α τότε:**

i) **Να βρεθεί η κυρτότητα και το πεδίο ορισμού της g**

ii) **Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi>0: 2f(\xi)=\int_3^5 f(t)dt$**

iii) **Αν η εφαπτομένη της g στο $A(\xi, g(\xi))$ είναι παράλληλη με την $\varepsilon_1: f(4)x-y=0$, να βρεθεί ο ξ**

iv) **Να δείξετε ότι $2g(x)\geq\int_3^5 f(t)dt\cdot(x-\xi)$**

94. **Έστω η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $A=[0,+\infty)$ με $f(0)=f'(0)=0$, $f(1)=1$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x>0$.**

i) **Να δείξετε ότι $e^{f^2(x)}>2f(x)$ για κάθε $x>1$.**

ii) **Να βρεθεί το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στην γραφική παράσταση της $g(x)=2\int_1^x f''(x)f(t)e^{f^2(t)}dt$, $x\geq 0$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$**

iii) **Να βρεθεί η ασύμπτωτη της $g(x)=2\int_1^x\left(1+2f(x)e^{f^2(t)-f^2(x)}\right)dt$ στο $+\infty$, αν δίνεται ότι $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$**

95. Έστω ότι για κάθε $x \in A = [0,1]$ ισχύουν :

- $f'(x) = g(x) > 0,$
- $g'(x) = -f(x),$
- $f(0) = g(1) = 0,$
- $g(0) = 1$

i) Να δείξετε ότι $f^2(x) + g^2(x) = 1, \quad x \in A$

ii) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f,g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο

iii) Να βρεθεί το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στην γραφική παράσταση της $h(x) = \int_0^x f(x) e^{f(t)} dt$, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = 1$

96. Έστω η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f'' συνεχή στο $\mathbb{R}$ και $2f(x)f'(x) = \int_0^x \left(f^2(t) + 2(f'(t))^2 + (f''(t))^2\right) dt$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις g, h για τις οποίες ισχύει $g'(x) = h(x)$, $h'(x) = -g(x)$ και $h(0) = 1, \quad h(1) = -1, \quad g(1) = 0, \quad f'(0) = 1$.

Να δείξετε ότι :

i) $(f'(x))^2 - f^2(x) = 1$ και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

ii) $f''(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iii) $g^2(x) + h^2(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iv) υπάρχει $x_0 \in (0,1) : \int_0^1 f(x) g(x) dx = f(x_0)$

97. Έστω $f(x+y) = \kappa f(x) f(y) + \kappa - 1$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $f(x) > 0$.

i) Αν $\kappa \neq 1$ να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή

ii) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0) = 1$, να δείξετε ότι $f'(x) f(-x) = f'(-x) f(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι $f(x) = e^x$

iii) Να βρείτε το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στη γραφική παράσταση της f και τις δύο κάθετες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που διέρχονται από το $O(0,0)$ και η ε_1 εφάπτεται στην f

98. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(1)=2$ και $2\int_1^x f(t)dt \geq (x-1)f(2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

i) $f(2)=4$

ii) υπάρχει $\xi\in(1,2): f(\xi)=3$

iii) υπάρχει $\xi_1,\xi_2\in(1,2): \dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=1$

99. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x \dfrac{1}{t^2+1}dt$ με $A=\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

i) Να δείξετε ότι $f(\varepsilon\varphi x)=x$ για κάθε $x\in A$

ii) Να βρεθεί το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στην C_f, τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την $x=1$

iii) Αν για την συνεχή συνάρτηση h ισχύει ότι $\int_0^1 4xh(x)dx>\pi$ για κάθε $x\in[0,1]$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1): \xi^3 h(\xi)>1-\xi h(\xi)$

100. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ όπου ισχύει $2e^{f(x)}=f^2(x)+2x$.
Να δείξετε ότι η f έχει σημείο καμπής το $A(0,1)$

101. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ όπου ισχύει:

$$f(x)e^{f(x)}=f^2(x)+2x.$$

Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

102. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ όπου ισχύει $f^3(x)+\alpha f^2(x)+\beta f(x)=2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι :

i) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

ii) $f(0)=0$

iii) Η εξίσωση $f(x^3+\alpha^3)=f(3\alpha^2\cdot x)$ έχει 3 ρίζες για $\alpha>0$

iv) Αν $\alpha=0$ και $\beta=1$ να βρεθεί η αντίστροφη της f και το $I=\int_0^1 f(x)dx$

103. **Έστω ότι η συνάρτηση f'' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με**

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x}{x} & \text{αν } x\neq 0\\ \alpha & \text{αν } x=0\end{cases}$$

Να δείξετε ότι:

i) $\alpha=2$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=0$

iii) **υπάρχει** $\xi\in(0,\pi): f'(\xi)=f'(\pi)$

104. **Έστω η συνάρτηση f' συνεχής στο $\mathbb{R}$ όπου ισχύει :**

$$\int_0^1\left((f(x))^2+(f'(x))^2\right)dx=f^2(1)-1 \text{ και } f(0)=1$$

i) **Να δείξετε ότι** $f(x)=e^x$

ii) **Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x+4x=4$ έχει μόνο μία ρίζα στο $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια ότι οι συναρτήσεις f και $g(x)=-x^2$ έχουν μόνο μία κοινή εφαπτομένη.**

105. **Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ όπου ισχύει :**

$$e^{-f(x)}-f(x)=-x+1,\quad f(0)=0$$

Να δείξετε ότι :

i) **η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $\mathbb{R}$**

ii) $\dfrac{x}{2}<f(x)<xf'(x)$ **για** $x>0$

iii) $\dfrac{1}{4}<\displaystyle\int_0^1 f(x)dx<\dfrac{1}{2}f(1)$

iv) $\displaystyle\int_x^{3x} f(t)dt\leq\int_{3x}^{5x} f(t)dt$ **για** $x\geq 0$

106. Έστω η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$ με $A=[0,+\infty)$

i) Να δείξετε ότι $g(x)\geq 1$ για κάθε $x\in A$

ii) Αν ισχύει ότι $\displaystyle\int_{f(x)}^{f''(x)} g(t)dt=f''(x)-f(x)$ για $x\geq 0$ να δείξετε ότι $f(x)=\kappa e^x+\lambda e^{-x}$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$

iii) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $f_1(x)=x^2+1$ και $f_2(x)=\dfrac{e}{x}$ έχουν μόνο ένα κοινό σημείο $\alpha\in(1,2)$

iv) Να βρεθεί το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων : $f_3(x)=e^x$, $f_1(x)=x^2+1$ και $f_2(x)=\dfrac{e}{x}$ για $x>0$

v) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\pi):\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx=f(\xi)$